ÍNDICE

2.1.- Introducción

En las investigaciones que parten del conocimiento proporcionado por los datos recogidos de una muestra el objetivo es inferir las características de la población, de la cual los datos recogidos constituyen una muestra representativa. En este tipo de investigaciones la hipótesis a contrastar especifica una característica de la población, como las siguientes:

- Si un determinado parámetro poblacional puede tomar un valor concreto.
- Si entre las variables medidas en la muestra existe correlación en la población.
- La forma de la distribución de la variable Y en la población.
- Si los datos observados en la muestra son independientes entre sí, etc.

Los dos primeros casos se incluyen dentro de los contrastes paramétricos que, en una primera aproximación diremos que son todos aquellos que se relacionan con el estudio de un parámetro poblacional (media, varianza, proporción, correlación, etc.) y siempre que la variable de estudio provenga de una población con una función de densidad de probabilidad conocida. Por su parte, las dos hipótesis siguientes se englobarían dentro de los contrastes no paramétricos que no se relacionan con parámetros poblacionales o se encuentran referidas a datos que provienen de una población con una función de densidad de probabilidad desconocida. En cualquiera de estos casos nos encontramos ante un diseño de investigación en el que se utiliza la información proporcionada por una muestra.

En el tema anterior se han visto los procedimientos de inferencia estadística basados en la determinación del intervalo de confianza de algunos parámetros poblacionales (media, varianza y proporción) que se apoyan en el conocimiento de la distribución muestral del correspondiente estadístico obtenido en la muestra. Igualmente se ha expuesto la metodología de los contrastes de hipótesis describiendo y explicando una serie de pasos que nos conducen a la toma de una decisión a partir del cálculo de un estadístico de contraste considerado como una medida de la discrepancia entre unos datos teóricos formulados en la hipótesis nula a contrastar y unos datos empíricos obtenidos en una muestra. Como veremos, tanto la estimación por intervalos como el estadístico de contraste pueden utilizarse para contrastar hipótesis sobre parámetros poblacionales, aunque en la práctica de la investigación es más habitual calcular esta discrepancia o estadístico de contraste. En cualquier caso, tanto un procedimiento como el otro se apoyan en el conocimiento de la distribución muestral (que corresponde a la función de distribución de probabilidad de estos estadísticos) en la que nos basaremos para tomar decisiones respecto a un valor hipotético que planteemos en la hipótesis nula para el parámetro poblacional. Al finalizar este capítulo el estudiante deberá alcanzar los objetivos que se exponen en el siguiente epígrafe:

2.2.- Objetivos

- Plantear las hipótesis en función de los objetivos de la investigación.
- Distinguir entre el contraste unilateral y bilateral.
- Seleccionar el estadístico de contraste más adecuado a las hipótesis planteadas.
- Conocer la distribución muestral del estadístico seleccionado.
- Realizar los cálculos oportunos para someter a contrastación empírica las hipótesis planteadas.
- Relacionar el intervalo de confianza con el estadístico de contraste
- Interpretar el nivel crítico *p*.
- Determinar e interpretar el, o los, valores críticos de la distribución muestral.
- Tomar una decisión respecto a las hipótesis planteadas.

2.3.- Contraste sobre la media poblacional

Por lo que vimos en el tema anterior, sabemos que el intervalo de confianza de un parámetro poblacional es un rango de valores definido a partir del estadístico obtenido en la muestra y delimitado por sus límites inferior y superior. Este intervalo cubrirá el valor del parámetro poblacional con una probabilidad de $1-\alpha$, denominada "nivel de confianza". En concreto, el intervalo de confianza de la media nos delimita entre qué dos valores se encontrará la media poblacional, μ, con una probabilidad o nivel de confianza, previamente fijado. En el tema anterior se realizó el siguiente ejemplo (Ej. 1.4) para calcular el intervalo de confianza de la media poblacional:

Ejemplo 2.1: En un experimento sobre atención, un psicólogo presenta durante 300 mseg un grupo de 16 letras del alfabeto (con una disposición de 4 filas y 4 columnas). Cada uno de los 12 sujetos que participan en el experimento debe verbalizar tantas letras como recuerde. El promedio de letras bien recordadas es de 7 y la desviación típica insesgada (cuasi-desviación típica) es de 1,3. ¿Entre qué límites se encontrará el verdadero número de palabras bien recordadas, con una probabilidad de 0,95?

En las condiciones que se plantean en este ejercicio, recordará el lector que el intervalo de confianza construido en torno a la media muestral, y que contendrá el valor del parámetro con una probabilidad de 0,95, se construye a partir de la distribución muestral de la media, la cual sabemos que es una distribución t de Student. En términos formales, para calcular este intervalo de confianza utilizamos la expresión del intervalo de confianza:

$$P(\overline{Y}-t_{\alpha/2}\cdot\sigma_{\overline{Y}}\leq\mu\leq\overline{Y}+t_{1-\alpha/2}\cdot\sigma_{\overline{Y}})=1-\alpha$$

Podemos observar los límites superior e inferior que se representan en la Figura 2.1 y que se obtienen sumando y restando a la media de la muestra el error máximo de estimación ($\left|t_{\alpha/2}\right|\cdot\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}$):

$$l_i=\overline{Y}-t_{0,025}\cdot\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}=7-2.201\cdot\frac{1,3}{\sqrt{12}}=6,174$$

$$L_s=\overline{Y}+t_{0,975}\cdot\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}=7+2.201\cdot\frac{1,3}{\sqrt{12}}=7,826$$

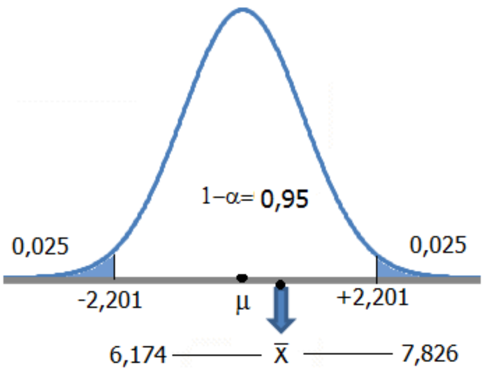


Figura 2.1: Intervalo de confianza par la media

El intervalo de confianza obtenido es (6,174; 7,826). Podemos afirmar al 95% de confianza que la media poblacional (desconocida) para el número de letras recordadas se encuentra entre los valores 6,174 y 7,826. Es decir, el intervalo de confianza de la media nos indica el conjunto de valores que podría tener la media poblacional con el nivel de confianza fijado previamente en el 95%. Por tanto, este intervalo se puede utilizar también para contrastar hipótesis sobre el valor que puede tomar este parámetro en la población. Así, si formulamos las hipótesis:

$$H_o:\mu=8$$
$$H_1:\mu\neq8$$

tenemos que comprobar si el intervalo de confianza cubre (se solapa) o no al valor de la media poblacional planteada en la hipótesis nula. En caso negativo tomaremos la decisión de rechazar la H_0 con un nivel de significación, previamente fijado, que en este ejemplo es $\alpha = 0{,}05$. En caso contrario, diremos que no tenemos evidencia suficiente para rechazar la H_o con un nivel de significación de 0,05 y la mantendremos como provisionalmente verdadera hasta que no reunamos evidencia suficiente para rechazarla. De acuerdo con esta forma de proceder podemos observar que el intervalo de confianza (6,174; 7,826) no cubre el valor de la media poblacional planteado en la hipótesis nula ($H_o : \mu = 8$) ya que el valor 8 planteado en esta hipótesis no se encuentra entre 6,174 y 7,826. Por tanto, rechazamos la hipótesis nula con un nivel de confianza del 95% (o con una probabilidad de 0,95).

Aunque el intervalo de confianza es un procedimiento para estimar parámetros poblacionales puede también aplicarse para el contraste de hipótesis. Sin embargo, como se adelantaba en el tema anterior, es más frecuente aplicar otro procedimiento alternativo y que suele utilizarse habitualmente en los informes de investigación publicados. Este procedimiento alternativo consiste en obtener el estadístico de contraste como una medida más exacta de la discrepancia entre el valor planteado en la hipótesis nula y el valor obtenido en la muestra como estimación del parámetro. Esta medida de la discrepancia tiene una distribución de probabilidad conocida por lo que suele ir acompañada de una probabilidad, a la que nos referiremos con el término de nivel crítico p, y que utilizaremos para tomar una decisión respecto a la hipótesis nula. Este nivel crítico p NO indica la probabilidad de que la H_o sea verdadera, sino que nos informa sobre la probabilidad de obtener un resultado como el obtenido en la muestra, o más extremo, bajo el supuesto de que la hipótesis nula es verdadera. Se trata, por tanto, de una probabilidad condicionada: en el caso de que H_0 sea cierta (condición) nos indica la probabilidad de obtener un valor del estadístico de contraste igual o más extremo que el obtenido efectivamente en nuestra muestra. Esto se representa simbólicamente como: $P(Y \geq y_i \mid H_0) = p$. Lo que sigue a la barra vertical indica la condición de esta probabilidad (en este caso, la condición es que H_0 es cierta) y se lee como: la probabilidad de que, siendo H_0 cierta, se obtenga un valor del estadístico muestral igual o más extremo que el obtenido (y_i) es igual a p (el nivel crítico). Téngase en cuenta que la H_o no es más que una conjetura sobre un valor del parámetro poblacional y difícilmente será verdadera. La finalidad de la investigación (y del contraste de hipótesis) es reunir información y evidencias suficientes para poder rechazarla.

2.3.1.- Conocida la varianza poblacional

Como se ha expuesto en los apartados anteriores, la inferencia estadística trata de estimar los parámetros poblacionales a partir de la información obtenida en la muestra. Sin embargo, en la actividad de la investigación real es poco probable que se conozca la varianza poblacional ya que conocerla supone que podemos acceder a todos los datos de la población en cuyo caso también podríamos calcular su media y sobraría cualquier tipo de inferencia o contraste sobre su valor. No obstante, si por trabajos previos podemos asumir un determinado valor para la varianza poblacional como razonable, entonces la distribución muestral de la media es una distribución normal, y el estadístico de contraste para la media poblacional es:

$$Z = \frac{\overline{Y} - \mu}{\sigma_{\overline{Y}}} = \frac{\overline{Y} - \mu_o}{\sigma / \sqrt{n}}$$

El estadístico Z se distribuye según la distribución normal tipificada, N(0;1). En esta ecuación:

- $\overline{Y}$ es la media obtenida en la muestra.
- μ_o es el valor de la media poblacional formulado en la hipótesis nula.
- $\sigma_{\overline{Y}}$ es el error típico de la media o desviación típica de la distribución muestral de la media.
- σ es la desviación típica poblacional que suponemos conocida.
- n es el tamaño de la muestra que estamos utilizando para contrastar la hipótesis.

En consecuencia, el estadístico Z cuantifica la distancia de la media de la muestra, $\overline{Y}$, a la media poblacional, μ_o, en unidades del error típico de la distribución muestral, $\sigma_{\overline{X}}$.

Ejemplo 2.2: Por estudios previos conocemos que la población masculina de la tercera edad de una determinada Comunidad Autónoma, tiene un gasto medio en medicamentos de 215 euros/año con una desviación típica de 36 euros y queremos saber si la población femenina tiene el mismo gasto. Con tal finalidad analizamos el gasto medio de <u>una muestra</u> de 324 mujeres de la tercera edad de esa misma comunidad observando que la media es de 220 euros/año. Asumimos que esta variable se distribuye normalmente en la población. Fijando un nivel de confianza del 95%, contraste si el gasto de las mujeres es significativamente distinto de 215 euros/año.

Condiciones y supuestos: El estudio utiliza un diseño de una muestra de mujeres en la que la variable gasto medio se mide con escala de razón (variable cuantitativa) y sabemos que se distribuye normalmente en la población. Adicionalmente conocemos la desviación típica poblacional que es de 36 euros. Se trata de un contraste paramétrico bilateral ya que, *a priori*, no sabemos si el gasto de las mujeres es mayor o menor de 220 euros/año. Es decir, solo queremos contrastar que el gasto de las mujeres es <u>diferente</u> a esa cantidad, pero sin asumir que el sentido de esta diferencia sea positivo o negativo. Por tanto, debemos contemplar la posibilidad de que pueda serlo en un sentido u otro. Un contraste de este tipo se dice bilateral por razones obvias.

Formulación de las hipótesis: La hipótesis de investigación es que "*las mujeres tienen un gasto medio en medicamentos distinto a los 215 euros/año*". Es decir, el investigador se ha planteado este estudio porque tiene razones para suponer que el gasto de medicamentos entre hombres y mujeres es distinto (*v.g.*, sabemos que por término medio las mujeres disfrutan de una mayor longevidad que los hombres pero con peor salud) y por ello plantea esta hipótesis de investigación. Sin embargo, normalmente la hipótesis estadística nula que plantea debe ser la contraria a su hipótesis de investigación. Por ello, la hipótesis nula debe plantearse en el sentido de que el gasto de las mujeres es de 215 euros/año, igual al de hombres, y la hipótesis alternativa que el gasto medio de las mujeres es un valor distinto a éste, es decir:

$$H_o : \mu = 215$$
$$H_1 : \mu \neq 215$$

Partimos de que, provisionalmente, la hipótesis nula es verdadera, es decir, que las mujeres tienen un gasto de 215 euros/año y se trata de encontrar evidencia contra esta hipótesis a partir de la información proporcionada por una muestra representativa. Inicialmente se observa que, efectivamente, las mujeres parece que tienen un gasto diferente, pero la pregunta es: ¿la diferencia de 5 euros entre el valor observado en la muestra y el que planteamos en la hipótesis nula evidencia realmente un gasto distinto o son debidas a fluctuaciones aleatorias? El rechazo de la hipótesis nula y la consiguiente aceptación de la hipótesis alternativa, se deberá a que la diferencia observada es "*estadísticamente significativa*", es decir, es una diferencia real y evidente que no puede atribuirse al azar, a fluctuaciones aleatorias debidas al muestreo.

Estadístico de contraste: Para contrastar nuestra hipótesis vamos a calcular la discrepancia entre la evidencia observada de que el gasto medio es de 220 euros en la muestra de mujeres con el valor hipotéticamente establecido para la población general que plantea un gasto medio es de 215 euros.

Calcularemos primero el error típico de la media (es decir, la desviación típica de la distribución muestral de todas las medias posibles en muestras de tamaño n = 324):

$$\sigma_{\overline{Y}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{36}{\sqrt{324}} = 2$$

Como la variable "*gasto anual en medicamentos*" se distribuye normalmente en la población y conocemos la desviación típica poblacional, la distribución muestral de la media es normal y el estadístico de contraste, como medida de esta discrepancia, es:

$$Z = \frac{\overline{Y} - \mu}{\sigma_{\overline{Y}}} = \frac{220 - 215}{2} = 2{,}5$$

$$(p = 0{,}0124)$$

Regla de decisión: En este contraste bilateral y trabajando con un nivel de confianza del 95%, los valores críticos a partir de los cuales rechazamos la hipótesis nula son $Z = \pm 1{,}96$ (Figura 2.2) . Estos valores representan la máxima diferencia, en un sentido o en otro, atribuible al azar que puede existir entre los datos empíricos observados en la muestra y los datos teóricos que planteamos en la hipótesis nula. En la muestra el valor observado es 220 euros/año y el valor hipotético planteado es de 215 euros/año. Esta diferencia corresponde a 2,5 desviaciones típicas de la distribución muestral.

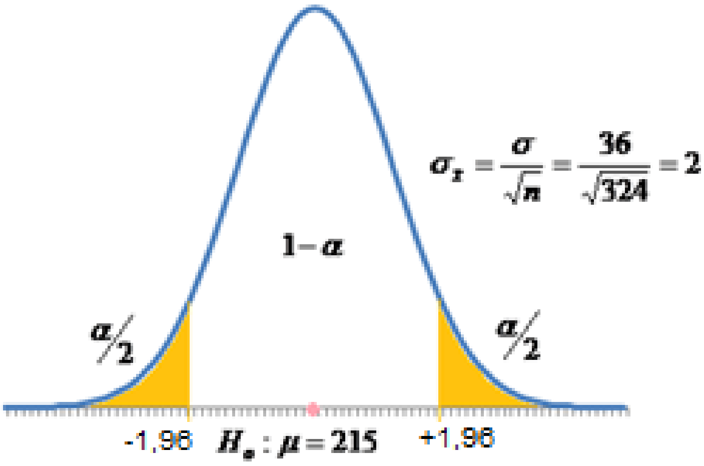


Figura 2.2: Distribución muestral de la media y regiones de decisión de la H_0: μ=215 para un nivel de confianza del 95%

Conclusión: Con un nivel de confianza del 95%, el valor de este estadístico de contraste (Z = 2,5) sobrepasa la máxima diferencia que cabe esperar por simple azar que es de 1,96. Por tanto, debemos rechazar la hipótesis nula con un nivel de confianza del 95%. De otra forma, al valor del estadístico de contraste obtenido de Z=2,5 le corresponde un nivel crítico p de 0,0124 (Figura 2.3). Esta probabilidad[1] indica que, suponiendo verdadera la hipótesis de que las mujeres tienen un gasto medio de 215 euros/año, la probabilidad de observar un gasto medio de 220 euros/año en una muestra de 324 mujeres es de 0,0124. Esta probabilidad es muy pequeña y menor que el nivel de significación "alfa" fijado en 0,05 ($0{,}0124 < 0{,}05 = \alpha$) lo que nos lleva a rechazar la hipótesis nula.

[1] Se busca en la tabla de la distribución normal, la probabilidad de P(Z≤-2,5) que es 0,0062. Al tratarse de un contraste bilateral tenemos que sumar la P(Z≥2,5) = 0,0062. La suma de estas dos probabilidades es el nivel p-crítico resultante.

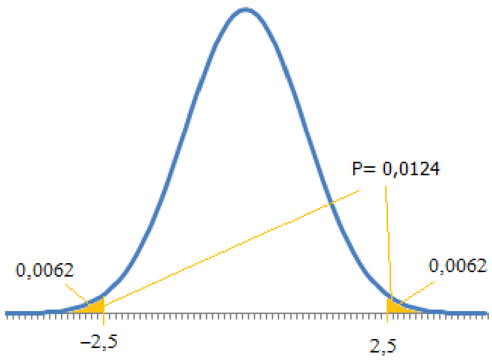


Figura 2.3: Nivel p-crítico para un contraste bilateral

Interpretación: a la vista de los cálculos y de nuestra conclusión podemos decir que, con un nivel de confianza del 95%, el gasto de las mujeres difiere significativamente de 215 euros/año, que es el que realizan los hombres.

Observe el lector que igual de lícito sería afirmar que, con un nivel de confianza del 99%, no hay evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula ya que el valor de p=0,0124 es mayor que el nivel de significación "alfa" de 0,01. Es decir que la diferencia encontrada es significativa con "alfa"=0,05 pero no lo es con un nivel de significación de 0,01. Dejamos al lector que llegue a la misma conclusión calculando nuevamente y comparando el valor del estadístico de contraste con los valores críticos para un nivel de confianza del 99%.

Estas conclusiones, aparentemente contradictorias, ponen de manifiesto la importancia de la replicación de la investigación para añadir más evidencia a favor o en contra de la hipótesis y, por otra parte, la exigencia de reflejar -en cualquier trabajo de investigación- el valor del estadístico de contraste y el nivel crítico p (Z=2,5; p=0,0124) con la finalidad de que el lector pueda interpretar por si mismo la magnitud de la discrepancia entre los datos y la hipótesis nula planteada y la seguridad a la hora de aceptar o rechazar la hipótesis[2].

2.3.2.- Desconocida la varianza poblacional

Ya se ha comentado que, en la práctica de la investigación social y de la Psicología, habitualmente se desconocen los parámetros poblacionales por lo que hay que estimarlos a partir de los estadísticos muestrales. Se estudió en el Tema 8 de Introducción al Análisis de datos y también en el tema anterior de este mismo texto, que si se desconoce la varianza poblacional y la forma de la distribución de la variable X en la población entonces la distribución muestral de la media es la distribución t de "Student", que se aproxima a la normal cuando se utilizan muestras grandes (con más de 30 elementos). En estas circunstancias el estadístico de contraste, como medida de la discrepancia, es:

$$t = \frac{\overline{Y} - \mu_o}{\sigma_{\overline{Y}}} = \frac{\overline{Y} - \mu_o}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

Que se distribuye según la t de "Student" con n-1 grados de libertad y donde $\hat{\sigma}$ es el estimador de la desviación típica poblacional que se puede realizar a partir de la varianza o de la cuasi-varianza de la muestra, como se exponía en el punto 1.3.3 del Tema 1 y que nos conduce a las siguientes expresiones finales:

[2] En este punto remitimos al lector al último epígrafe del Tema 1 que expone la relación entre el nivel crítico p y los errores del contraste.

$$t = \frac{\overline{Y} - \mu_o}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t = \dfrac{\overline{Y} - \mu_o}{S_{n-1}/\sqrt{n}} \\[2ex] t = \dfrac{\overline{Y} - \mu_o}{S_n/\sqrt{n-1}} \end{cases}$$

Aplicaremos a los datos del ejemplo 2.1 el contraste de hipótesis correspondiente:

Ejemplo 2.3: En un experimento sobre atención, un psicólogo presenta durante 300 mseg un grupo de 16 letras del alfabeto (con una disposición de 4 filas y 4 columnas). Cada uno de los 12 sujetos que participan en el experimento debe verbalizar tantas letras como recuerde. El promedio obtenido de letras bien recordadas es de 7 y la desviación típica insesgada (cuasi-desviación típica) de la muestra es de 1,3. Sabiendo que el recuerdo es una variable que se distribuye normalmente en la población y fijando el nivel de significación en 0,05, ¿Puede ser 8 la media de letras recordadas?.

Condiciones y supuestos: una muestra aleatoria en la que recogemos datos medidos al menos con escala de intervalo y sabemos que la variable se distribuye normalmente en la población con varianza desconocida.

Formulación de hipótesis: Se plantea un contraste bilateral

$$H_o : \mu = 8$$
$$H_1 : \mu \neq 8$$

Partimos de que la H_0 es verdadera, es decir, que la media de palabras recordadas en este tipo de pruebas es de 8, y se trata de ver si los datos recogidos en una investigación bien diseñada y utilizando una muestra aleatoria arrojan evidencia a favor o en contra de la hipótesis nula.

El estadístico de contraste o discrepancia entre el estimador (media de la muestra) y el valor del parámetro formulado en la hipótesis nula, μ_o, es :

$$t = \frac{\overline{Y} - \mu_o}{\sigma_{\overline{Y}}} = \frac{7 - 8}{1{,}3/\sqrt{12}} = \frac{-1}{0{,}375} = -2{,}66$$

Obsérvese que, al desconocer la varianza poblacional, hemos utilizado S_{n-1}=1,3 muestral para calcular el estadístico de contraste.

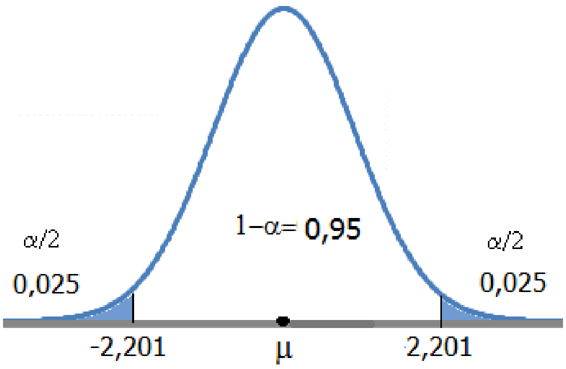


Figura 2.4: Valores críticos de la distribución muestral para un nivel de confianza del 95%

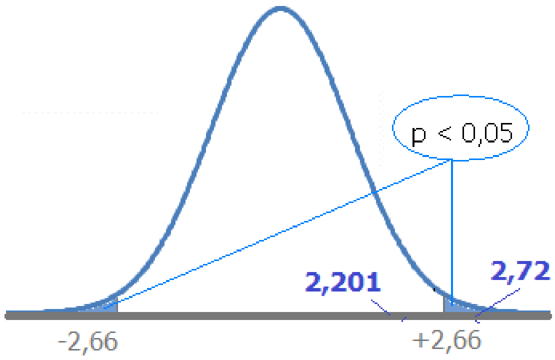
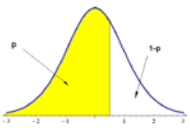


Figura 2.5: Nivel crítico p asociado al estadístico de contraste t=2,66 en un contraste bilateral

Regla de decisión: Con un nivel de confianza del 95% en un contraste bilateral, la máxima discrepancia que cabe esperar por simple azar entre el estimador y el valor planteado en la hipótesis nula es 2,201 (valores críticos). El valor del estadístico de contraste obtenido, supera este valor máximo (véase la Figura 2.4) lo que nos lleva a rechazar la hipótesis nula. El nivel crítico p asociado a este estadístico de contraste no aparece explícitamente en la tabla de la distribución t con 11 grados de libertad, pero podemos ver que es menor de 0,05 (de forma exacta es p=0,022) que resulta menor que el nivel de significación fijado en 0,05 (véase la Figura 2.5). La forma de buscar esta probabilidad en la tabla es la siguiente:



g.l.	**0,550**	**0,600**	**0,650**	**0,700**	**0,750**	**0,800**	**0,850**	**0,900**	**0,950**	**0,975**	**0,990**	**0,995**
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	0,1289	0,2602	0,3966	0,5415	0,6998	0,8791	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,1286	0,2596	0,3956	0,5399	0,6974	0,8755	1,088	1,363	1,796	**2,201**	**2,718**	3,106
12	0,1283	0,2590	0,3947	0,5386	0,6955	0,8726	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Con 11 gl, el valor 2,66 se encuentra entre 2,201 y 2,718, (fig: 2.5 y tabla de t) por tanto: 0,025>p>0,01 en una cola de la distribución y 0,05>p>0,02 utilizando las dos colas de la distribución

Interpretación: A partir de la evidencia que proporcionan los datos de la investigación, debemos rechazar la hipótesis de que el número medio de palabras recordadas es de 8 con un nivel de confianza del 95%.

2.4.- Contraste sobre la proporción poblacional

El contraste paramétrico de hipótesis para una proporción poblacional sigue la misma lógica y procedimiento que el seguido para el contraste de la media. Sabemos que la proporción, o frecuencia relativa de aparición de una observación, es el cociente entre el número de veces que aparece la observación y el número total de observaciones. En el tema anterior se ha visto que la distribución muestral de la proporción es una distribución binomial y como se expuso en la asignatura de Introducción al Análisis de Datos, de primer curso, la distribución binomial se aproxima a la normal cuando el tamaño de la muestra es grande ($n > 25$ o $n \cdot p > 5$). En esta distribución muestral, la media y desviación típica (o error típico de la proporción) valen:

$$\mu_p = \pi$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi_o \cdot (1-\pi_o)}{n}}$$

A partir de este supuesto y considerando, como se ha visto en el tema anterior, que la proporción observada en la muestra, p, es el estimador insesgado de la proporción poblacional, π_o, el intervalo de confianza para la proporción poblacional a partir de la proporción observada en una muestra se obtiene sumando a la proporción observada en la muestra el error máximo de estimación (Figura 2.6):

$$l_i = p - Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_p = p - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

$$L_s = p + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_p = p + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

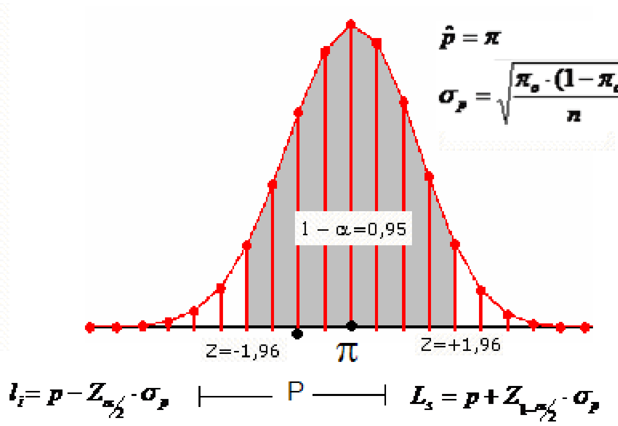


Figura 2.6: Intervalo de confianza para la proporción poblacional, π.

Igual que razonábamos para el caso de la media, para contrastar una hipótesis referida a un valor hipotéticamente establecido como proporción poblacional, π, podemos determinar el intervalo de confianza y comprobar si el valor planteado en la hipótesis nula se encuentra incluido o no por el intervalo.

De forma similar se puede determinar un estadístico de contraste para cuantificar la discrepancia entre el valor observado en la muestra y el planteado en la hipótesis nula. Para el caso de la proporción y sabiendo que la distribución muestral del estadístico, p, se aproxima a la normal cuando las muestras son grandes ($n > 25$ o $n \cdot p > 5$) , este estadístico es:

$$Z = \frac{p - \pi_o}{\sigma_p} = \frac{p - \pi_o}{\sqrt{\frac{\pi_o \cdot (1-\pi_o)}{n}}}$$

Si la hipótesis nula es falsa esta discrepancia debe superar el valor crítico de la distribución muestral. De igual forma, el nivel crítico p asociado a esta discrepancia debe ser menor que el nivel de significación, α, para poder rechazar la hipótesis nula. En caso contrario no tendremos evidencia suficiente para poder rechazar la hipótesis nula planteada.

Ejemplo 2.4: Un investigador de estudios de mercado cree que más del 20% de los adolescentes cambian de móvil cada año. Con esta finalidad realiza una encuesta sobre una muestra de 150 adolescentes observando que 39 de ellos afirman haber cambiado de móvil en el último año. Con un nivel de confianza del 99%, ¿podemos admitir la hipótesis del investigador?

Condiciones y supuestos: El estudio utiliza un diseño de una muestra de 150 adolescentes en la que la variable "cambiar de móvil", es cualitativa y dicotómica ya que la respuesta solo puede ser "si" o "no". Cuando contabilizamos en cada muestra el número de participantes que contestan sí o no, entonces esta variable tiene una distribución binomial que, en las condiciones de este ejemplo, se aproxima a la normal por tratarse de una muestra grande. El investigador quiere demostrar que el porcentaje de adolescentes que cambia de móvil cada año es superior al 20%.

Planteamiento de las hipótesis: Se trata de un contraste unilateral ya que si la hipótesis alternativa dice que "la proporción supera el 0,20", la hipótesis nula dice que "la proporción es igual o no supera el 0,20". Por otra parte, observamos que a partir de los datos de la muestra el porcentaje de adolescentes que cambian de móvil es del 26% (o una proporción de 0,26). La hipótesis nula formula que la diferencia entre el valor observado en la muestra (26%) y el valor planteado para la proporción poblacional (20%) es nula. En otras palabras, que esta diferencia se debe a las fluctuaciones aleatorias porque la proporción poblacional es del 20% o menor.

$$H_0 : \pi_o \leq 0{,}20$$
$$H_1 : \pi_o > 0{,}20$$

Estadístico de contraste: Calculamos la discrepancia entre p y π medida en unidades de error típico de la proporción (asumiendo que H_0 es cierta).

$$Z = \frac{p - \pi_o}{\sigma_p} = \frac{p - \pi_o}{\sqrt{\frac{\pi_o \cdot (1 - \pi_o)}{n}}} = \frac{0{,}26 - 0{,}20}{\sqrt{\frac{0{,}20 \cdot 0{,}80}{150}}} = 1{,}837$$

Siendo la proporción poblacional p=0,26 un valor de la distribución muestral de la proporción, el estadístico Z=1,837 indica que la distancia de p=0,26 a $\pi_o = 0{,}20$ es de 1,837 desviaciones típicas de la distribución muestral.

Regla de decisión: Con un nivel de confianza del 99% y en un contraste unilateral, el valor crítico para rechazar la hipótesis nula es 2,33 (véase la Figura 2.7).

De otra forma, el nivel crítico p[3] asociado al estadístico de contraste obtenido es 0,0329 que es una probabilidad mayor que el nivel de significación establecido a priori $\alpha = 0{,}01$.

[3] Debe buscarse en las tablas de la distribución normal la probabilidad de obtener puntuaciones Z mayores que 1, 84. Recuérdese que las tablas de la distribución normal proporcionan probabilidades por debajo de una puntuación Z determinada. Por tanto, este valor es $P(Z \geq 1{,}84) = 1 - P(Z \leq 1{,}84) = 1 - 0{,}9671 = 0{,}0329$

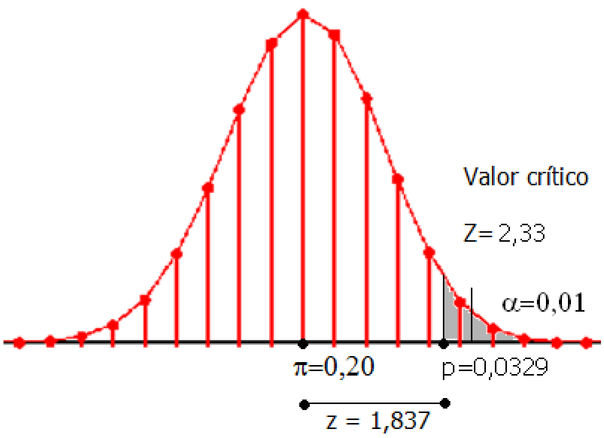


Figura 2.7: Estadístico de contraste, nivel de significación y nivel crítico p para el contraste unilateral derecho de H_0: π=0,20

Conclusión. Como el estadístico de contraste -o discrepancia encontrada entre los valores p=0,26 y $\pi = 0{,}20$ de 1,837 no supera la máxima diferencia que puede esperarse por simple azar (el valor crítico 2,33), no tenemos evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula. De otra forma, el nivel crítico p de 0,0329 es mayor que el nivel de significación $\alpha = 0{,}01$ por lo que no podemos rechazar la hipótesis nula.

Interpretación: A la luz de los datos obtenidos por el investigador no hay evidencia suficiente para asumir que más del 20% de los adolescentes cambian de móvil cada año.

2.5.- Contraste de hipótesis sobre la varianza poblacional

Ya sabemos que la inferencia y el contraste de hipótesis sobre cualquier parámetro requieren conocer cómo es su distribución muestral. En el tema anterior, vimos que si de una población donde la variable Y se distribuye normalmente con media μ y varianza σ^2, se extraen todas las posibles muestras del mismo tipo y tamaño, y en cada muestra calculamos sus varianzas S_n^2, entonces se puede demostrar que la variable aleatoria:

$$\frac{n \cdot S_n^2}{\sigma^2}$$

Sigue una distribución chi-cuadrado con n-1 grados de libertad (véase la Figura 2.8).

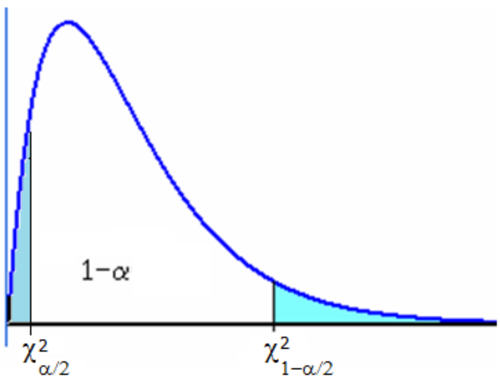


Figura 2.8: Distribución muestral de la varianza y nivel de confianza

De la misma forma, y por la relación existente entre varianza y cuasi-varianza, la expresión anterior también se puede expresar con referencia a la cuasi-varianza muestral, y sería:

$$\frac{(n-1)\cdot S_{n-1}^2}{\sigma^2}$$

que también se distribuye según chi-cuadrado con n-1 grados de libertad.

Con referencia a este principio vimos que el intervalo de confianza para la varianza poblacional viene definido por sus límites inferior y superior, que se calculan mediante la expresión:

$$l_I = \frac{n\cdot S_n^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \qquad l_s = \frac{n\cdot S_n^2}{\chi^2_{\alpha/2}}$$

Estos límites delimitan los valores entre los que se encontrará la varianza poblacional, con una probabilidad de $1-\alpha$.

Por otra parte, el estadístico de contraste o medida de la discrepancia entre el estimador y el parámetro es un cociente que recoge ambos valores, y adoptan las siguientes expresiones en función de que realizamos el cálculo con la varianza muestra o con la cuasi-varianza:

A partir de la varianza muestral

$$\chi^2 = \frac{n\cdot S_n^2}{\sigma_o^2}$$

Y a partir de la cuasi-varianza muestral:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\cdot S_{n-1}^2}{\sigma_o^2}$$

siendo σ_0 la desviación típica poblacional postulada en H_0. Con esta medida de la discrepancia, y a partir de la varianza obtenida en una muestra, comprobaremos la hipótesis acerca de la varianza poblacional de una variable normalmente distribuida. En este contraste se pueden dar los tres casos que pueden verse en la Figura 2.9:

Contraste bilateral	Unilateral derecho	Unilateral izquierdo:
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$	$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$
$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$

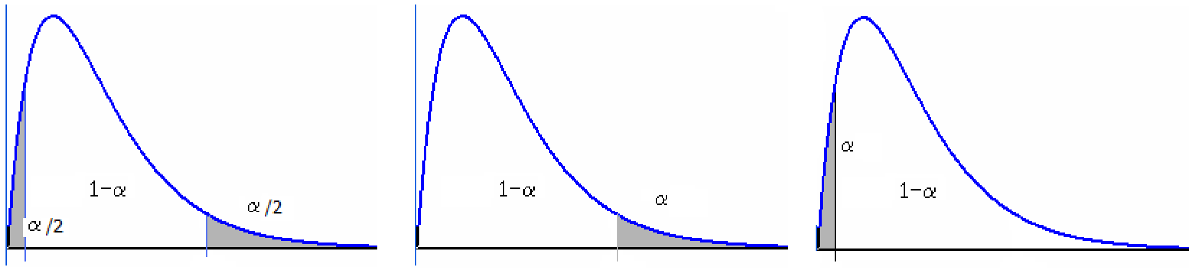


Figura 2.9: Regiones de rechazo de la hipótesis nula en contrastes bilateral y unilaterales.

Y siguiendo los pasos establecidos para todo contraste de hipótesis tal y como veremos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.5: El manual de un test para detectar niños con problemas de aprendizaje afirma que las puntuaciones del test se distribuyen normalmente y que la varianza de las puntuaciones disminuye con la edad, tomando el valor de 18,1 para los niños promedio de 5 años. Un psicólogo infantil considera que actualmente esta variabilidad ha aumentado y para probarlo, utiliza una muestra de 25 niños de 5 años a los que aplica el test obteniendo una desviación típica sesgada de 4,9 puntos. Trabajando con un nivel de significación de 0,01, contraste la hipótesis del investigador.

Condiciones y supuestos: El estudio utiliza un diseño de una muestra aleatoria de 25 niños a los que se les pasa un test. Asumimos que estas puntuaciones se miden, al menos en una escala de intervalo, y se distribuyen normalmente en la población con varianza 18,1, tal como indica el baremo del test. En la muestra se obtiene una desviación típica insesgada de 4,9.

Formulación de hipótesis: El investigador quiere probar que la varianza del test en los niños de 5 años es ahora mayor de 18,1 como afirma el manual. Por consiguiente, concreta una hipótesis nula contraria a la hipótesis que él desea probar de tal forma que si consigue rechazarla con los datos de la investigación, lo está haciendo con un elevado grado de confianza. Se trata por tanto de un contraste unilateral derecho.

$$H_0 : \sigma^2 \leq 18{,}1$$
$$H_1 : \sigma^2 > 18{,}1$$

Estadístico de contraste: Conociendo la desviación típica sesgada de la muestra el estadístico de contraste, es:

$$\chi^2 = \frac{n \cdot S_n^2}{\sigma_o^2} = \frac{25 \cdot 4{,}9^2}{18{,}1} = 33{,}1629$$

Regla de decisión: En la distribución chi-cuadrado con n-1 = 25-1= 24 grados de libertad y un nivel de confianza del 99%, el valor crítico para rechazar la hipótesis nula es 42,98 (véase la Figura 2.10). El nivel crítico p hay que buscarlo en la tabla de la distribución chi-cuadrado con 24 gl y un chi-cuadrado igual a 31,84, y por aproximación es p =0,10 que corresponde al valor 33,20 que es el que nos aparece más cercano a nuestro estadístico de contraste 31,84. Rechazaremos la hipótesis nula si el estadístico de contraste es mayor que el valor crítico de 42,98 o si el nivel crítico p es menor que el nivel de significación de 0,01.

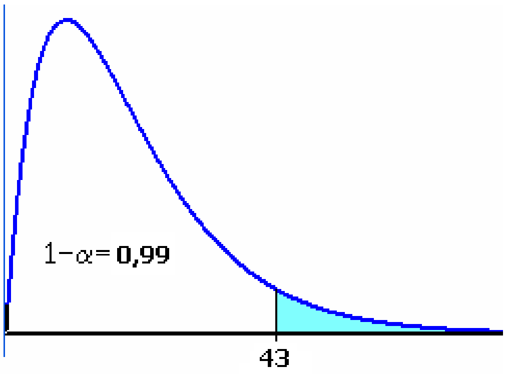


Figura 2.10: Valor crítico de la distribución chi-cuadrado con 24 gl y un nivel de significación de 0,01.

g.l.	-	0,750	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995	0,999
-	-	-	-	-	-	-	-	-
23	-	27,14	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18	49,73
24	-	28,24	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56	51,18
25	-	29,34	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93	52,62
-	-	-	-	-	-	-	-	-

Conclusión: Como el estadístico de contraste obtenido no supera el valor crítico, la evidencia aportada por nuestra muestra de estudio no resulta suficiente para rechazar la hipótesis nula. Igulamente, siendo el estadístico de contraste 31,84 buscamos en la distribución chi-cuadrado con 24 gl, el valor más próximo a éste, que es 33.20 y que se corresponde con un nivel crítico p de 0,10 que es mayor que el nivel de significación fijado en el 0,01. Por tando no tenemos evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula.

Interpretación: No tenemos evidencia suficiente para afirmar que la variabilidad de las puntuaciones obtenidas en el test para detectar problemas de aprendizaje en los niños de 5 es ahora mayor que la que figura en el manual del test.

Aclaración: Si el contraste se hubiera realizado a partir de la cuasi-varianza muestral en lugar de la varianza, el resultado del estadístico de contraste hubiera sido el mismo. Veámoslo, la cuasi-varianza de la muestra es:

$$S_{n-1}^2 = \frac{n \cdot S_n^2}{n-1} = \frac{25 \cdot 4{,}9^2}{25-1} = 25{,}01$$

Y en este caso, el estadístico de contraste, toma el mismo valor:

$$\chi^2 = \frac{(n-1) \cdot S_{n-1}^2}{\sigma_o^2} = \frac{(25-1) \cdot 25{,}01}{18{,}1} = 33{,}16$$

2.6.- Cálculo de la Potencia del contraste

En el tema anterior se han expuesto los errores que se pueden cometer en todo contraste de hipótesis: rechazar una hipótesis nula que es verdadera (error tipo I o α) y no rechazar una hipótesis nula que es falsa (error tipo II o β). Allí se comentó que la potencia de un contraste estadístico es el complementario del error tipo II $(1-\beta)$. Un aspecto importante de la investigación es conocer el valor que adopta la potencia ya que representa la probabilidad de poder detectar el efecto de interés que estamos buscando.

En este apartado vamos a ver, apoyándonos en el desarrollo de dos ejemplos, el procedimiento para calcular la potencia de un contraste paramétrico referido a la media y a la proporción poblacional en el diseño de una muestra. Pero téngase en cuenta que la potencia de un contraste se puede calcular en todo tipo de contraste de hipótesis, sea de la naturaleza que sea y para todo tipo de diseño de investigación de los que veremos a lo largo de este curso.

Ejemplo 2.6: Supongamos que la duración media de una lámpara de bajo consumo de una determinada marca es de 1000 horas con un desviación estándar de 220 horas. La empresa que las fabrica introduce un nuevo proceso de fabricación y afirma que la vida media de las nuevas es superior a las antiguas. Vamos a suponer que como hipótesis alternativa única se plantea un promedio de duración de 1060 horas. Tomando un nivel de significación del 5%, determinar el error tipo II y la potencia de la prueba, si el estudio se realizara con un muestra de 100 lámparas.

En la Figura 2.11 se plantea gráficamente la situación de este contraste unilateral. Una vez establecido en la distribución de la hipótesis nula el error tipo I (0,05) y que se corresponde con un valor crítico de Z = 1,64, se trata de determinar a qué valor corresponde en la distribución muestral de las duraciones medias de las lámparas antiguas. El resultado se obtiene de:

$$Z = \frac{\overline{Y} - \mu}{\sigma_{\overline{Y}}} \quad \rightarrow \quad 1{,}64 = \frac{\overline{Y} - 1000}{220/\sqrt{100}}$$

$$\overline{Y} = 1000 + 1{,}64 \cdot 220/\sqrt{100} = 1036{,}1$$

Por tanto, una duración media de más de 1036,1 horas en una muestra de 100 lámparas nos conduciría a rechazar la H_0. Para determinar el error tipo II (beta), debemos saber la puntuación típica que corresponde a esta media muestral pero referido a la media de la distribución de H_1, es decir, al valor planteado como hipótesis alternativa establecido en $\mu_1 = 1060$.

$$Z = \frac{1036{,}1 - 1060}{220/\sqrt{100}} = -1{,}09$$

En la distribución de H_1, la probabilidad de obtener un valor de Z igual o menor de -1,09 es 0,1379, que es la probabilidad de cometer un error tipo II. Y su complementario 1-0,1379=0,8621 es la potencia del contraste o probabilidad de que los resultados de la investigación permitan rechazar la hipótesis nula cuando es realmente falsa.

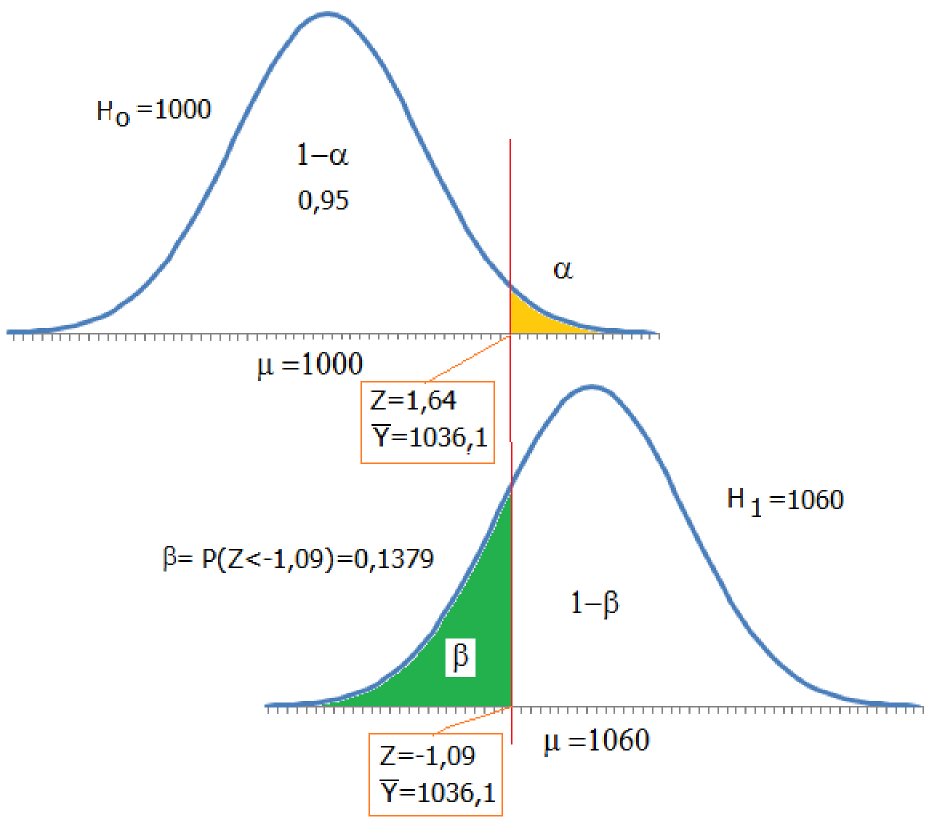


Figura 2.11: Representación gráfica del ejemplo 2.6

Resumiendo: si se rechazara la hipótesis nula de que el promedio de duración es de 1000 horas, pero en realidad esta hipótesis fuera verdadera (es decir, el nuevo proceso de fabricación no alarga la duración) entonces estaríamos cometiendo un error (tipo I) del 5%; si se acepta la hipótesis nula, pero la alternativa es la verdadera, la probabilidad de cometer este error (tipo II) es del 13,79%. Por tanto, la potencia de la prueba es del 86,21% (1 – 0,1379 = 0,8621).

Realizaremos otro cálculo de la potencia del contraste recurriendo al ejemplo 1.8 del tema anterior que se resolvía aplicando la distribución binomial.

Ejemplo 2.7. Para contrastar la presunta "*habilidad detectora*" de la dama se preparan 16 tazas de té, siguiendo ambos procedimientos: en ocho se vierte primero la leche, y en otros ocho se vierte primero la infusión. La presentación se realiza al azar y la dama sólo tiene que decir cuál ha sido el procedimiento (primero la leche y después el té, o a la inversa). Supongamos, por ejemplo, que la dama acierta en 12 ocasiones. Vamos a utilizar este dato como hipótesis alternativa, para calcular la potencia de un contraste unilateral derecho con un nivel de significación de 0,05, es decir, veremos qué sucede bajo la hipótesis nula de que la señora no puede realizar esta discriminación ($\pi = 0{,}5$) en relación a lo que sucedería si la señora puede, efectivamente, realizarla con una probabilidad superior al azar que, en este caso, hemos supuesto igual a 0,75.

$$H_0 : \pi = 0{,}5$$
$$H_1 : \pi = 0{,}75$$

Como vimos en el tema 1, la dama no tiene esa habilidad si su probabilidad de acertar en n=16 ensayos es de aproximadamente 8 ocasiones (el 50% de los casos). ¿A partir de qué número de aciertos procederíamos a rechazar la hipótesis nula con un nivel de significación de 0,05? Consultamos en la tabla de la distribución binomial para n=16 y p=0,5 el número de aciertos superiores a 8, el 50%, y cuya suma sea al menos igual o menor que el alfa fijado. Vemos que sólo rechazaríamos la hipótesis nula si la dama acierta en 12 o más ocasiones, ya que la suma de estas probabilidades vale:

$$p(y \geq 12) = P(y = 12) + P(y = 13) + P(y = 14) + P(y = 15) + P(y = 16) =$$
$$0{,}0278 + 0{,}0085 + 0{,}0018 + 0{,}0002 + 0{,}0000.. = 0{,}0383 \leq \alpha = 0{,}05$$

x	P=0,5
-	-
11	0,0667
12	0,0278
13	0,0085
14	0,0018
15	0,0002
16	0,0000

Tabla de la distribución binomial para N=16 y p=0,5

x	P=0,75
-	-
11	0,1802
12	0,2252
13	0,2079
14	0,1336
15	0,0534
16	0,0100

Tabla de la distribución binomial para N=16 y p=0,75

Sabiendo que la potencia corresponde a la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es falsa, es decir, cuando la dama sí tiene esa habilidad y que esta decisión se toma cuando es capaz de acertar en 12 o más ocasiones, la potencia del contraste se calcula procediendo de la siguiente forma:

Se calcula la probabilidad de acertar en 12 o más ocasiones cuando la dama sí tiene esa habilidad que, de acuerdo con la hipótesis alternativa hemos fijado en p=0,75[4] . Por consiguiente, acudimos a la tabla de la distribución binomial con n=16, p=0,75 (véase la Fig 2.12) y sumamos las probabilidades de:

$$p(y \geq 12) = P(y = 12) + P(y = 13) + P(y = 14) + P(y = 15) + P(y = 16) =$$
$$0{,}2252 + 0{,}2079 + 0{,}1336 + 0{,}0534 + 0{,}0100 = 0{,}6302 = 1 - \beta$$

4 La tabla de la distribución binomial no refleja el valor p=0,75 pero la forma de razonar es la siguiente: Si la probabilidad de acertar es 0,75, la de fallar es 0,25. Por tanto, la probabilidad de tener 12 aciertos (con p=0,75) en N=16 ensayos es la misma que la probabilidad de tener 4 fallos (con p=0,25) en esos mismos 16 ensayos. Y esta probabilidad de p=0,25 sí que figura en la tabla binomial.

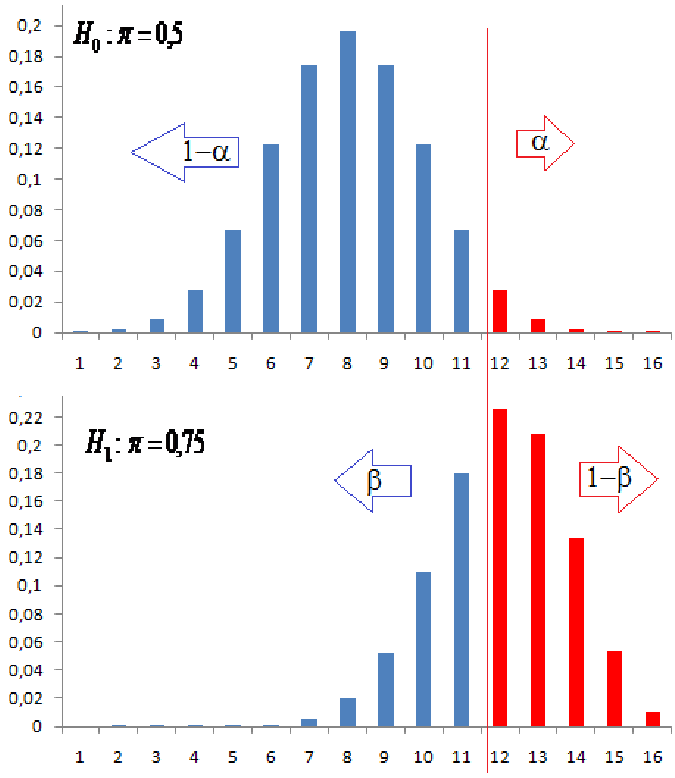


Figura 2.12: Representación gráfica del ejemplo 2.7

A partir de estos ejemplos, el lector puede deducir que para calcular la potencia de un contraste se necesita que la hipótesis nula y la alternativa sean simples, es decir, que establezcan un único valor como parámetro poblacional en vez de un rango de valores como hacíamos en el contraste de hipótesis. En los ejemplos que se ha desarrollado, y en el caso concreto de la media, los cálculos se han realizado para los valores $\mu = 1000$, en la $\mathrm{H}_{0,}$, y $\mu = 1060$ en la H_1 . Cuando la hipótesis alternativa es compuesta, es decir, plantea más de un valor como media poblacional (H_1: $\mu \neq 1000$) la **potencia del contraste**, o *probabilidad de rechazar una hipótesis nula que en realidad es falsa*, varía en función de dos factores: la distancia entre el valor de la hipótesis nula y la hipótesis alternativa, y el tamaño muestral. De este modo para un mismo valor del error tipo I, se pueden confeccionar lo que se denominan **curvas de potencia**, las cuales permiten fácilmente localizar la potencia de un contraste según sea el valor que puede tomar H_1 y el tamaño de la muestra. En la Figura 2.13 se representan diversas curvas de potencia para los datos del ejemplo, de acuerdo a diferentes tamaños muestrales y a diferentes valores de H_1. Se puede ver en la Figura 2.13 que para $H_1 = 1060$ y un tamaño muestral de 100, la potencia, efectivamente, está por encima de 0,85 en el gráfico (el valor exacto es 0,8621).

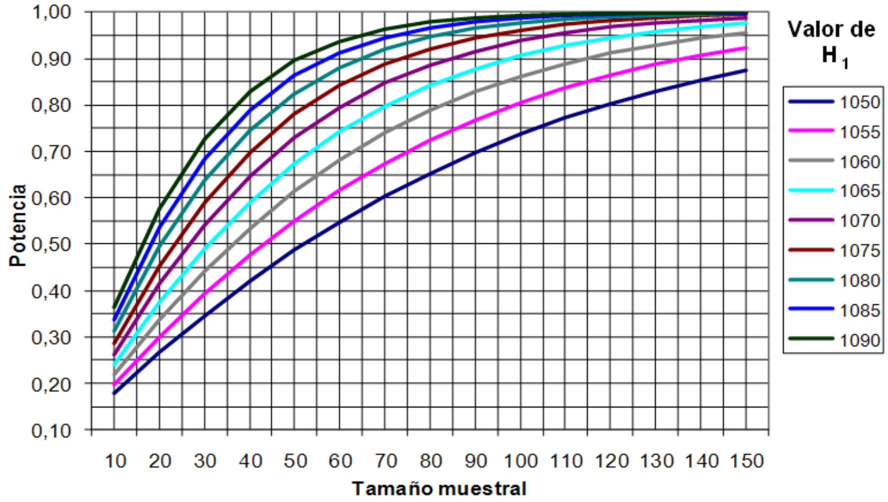


Figura 2.13: Potencia en función de H_1 y tamaño muestral, con H_0 = 1000 y Error Típico = $^{220}\!/_{\sqrt{n}}$

2.7.- Nivel crítico p y errores en los contrastes

En las pruebas clásicas de contrastes que hemos explicado, es preciso establecer el error tipo I (nivel de significación α) antes de realizar el contraste, de modo que este valor no influya en la decisión final que se toma. Este error es, pues, el máximo riesgo que estamos dispuestos a admitir al tomar una decisión respecto a la hipótesis nula. No obstante, establecer previamente un nivel de error tipo I, presenta algún inconveniente que puede ser decisivo en la decisión que se tome.

Como hemos visto en los ejemplos 2.2 y 2.4 de este tema, la decisión que se tome sobre H_0 puede depender del nivel de significación que se establezca, y se puede dar la circunstancia de que sea rechazada con un nivel del 5% y no serlo con el 1%. Si bien es cierto que hay un acuerdo en el ámbito científico acerca de que "alfa" debe ser un valor pequeño (aunque el valor concreto depende mucho del área de investigación, siendo usual en Psicología el 0,05, en otros ámbitos los editores de las revistas científicas llegan a pedir valores de α tan pequeños como 0,01 o inferiores), es más difícil determinar cuán pequeño debe ser, ya que en parte dependerá de factores, alguno de los cuales, como señalan Wonnacott y Wonnacott (1999), pueden ser simplemente las creencias previas sobre los procesos de toma de decisión que se han realizado anteriormente sobre la misma o parecida cuestión, y también sobre las consecuencias que se deriven al tomar una decisión errónea, y ésta se puede tomar tanto rechazando una hipótesis nula que es verdadera (error tipo I) como aceptando una hipótesis nula que es falsa (error tipo II). Además, es preciso tener en cuenta que una disminución del primero (α) provoca un aumento automático del segundo (β).

Debido, pues, a estos inconvenientes, en el análisis de datos moderno hace ya un tiempo que se ha introducido el denominado nivel crítico p, que se define como el nivel de significación más pequeño al que una hipótesis nula puede ser rechazada con la medida de discrepancia obtenida. Es decir, el nivel crítico p es la probabilidad asociada a la medida de discrepancia que hemos obtenido a partir de la información obtenida en nuestra muestra y cuantifica la probabilidad de obtener unos datos como los obtenidos en la investigación bajo el supuesto de que la hipótesis nula es verdadera.

En los contrastes bilaterales de parámetros (o "two tail" en inglés que, literalmente, significa "dos colas" haciendo referencia a los dos extremos de la distribución de probabilidad correspondiente) de una distribución muestral simétrica (*v.g.* la distribución normal, la t de Student o la binomial cuando p=0,5), el valor del nivel crítico p se obtiene multiplicando por dos la probabilidad asociada a los valores mayores o menores (según en qué parte de la cola caiga el valor del estadístico de contraste como medida de discrepancia).

Al utilizar como criterio para la decisión el nivel crítico p no hay que establecer previamente un nivel de significación, y ésta se toma en función del valor de p. Si p es pequeño se rechazará H_0, y si es grande se aceptará H_0. Obviamente, como señalan Pardo y San Martin (1994), persiste el problema de determinar qué es grande y qué pequeño. Entonces para tomar una decisión hay que recurrir al criterio del grado de cercanía o alejamiento de *p* a, por ejemplo, el valor 0,05. Si es claramente inferior, se rechaza H_0, si es claramente superior se acepta H_0, y si está en torno a ese valor, se vuelve a tomar nueva evidencia muestral y se repite el contraste.

No obstante, el empleo del nivel crítico p como criterio de decisión tampoco está exento de problemas, ya que, al igual que las medidas de discrepancia observada entre H_0 y la evidencia muestral, depende del tamaño de la muestra utilizada, y es por ello, que, desde la década de los ochenta del siglo pasado se han explorado nuevas medidas, independientes del tamaño muestral, que explicamos en otros temas.

2.8.- Resumen

Como se ha explicado en los diseños de una muestra, todo contraste de hipótesis tiene unos pasos que se pueden fijar con más o menos detalle. De acuerdo con los que se han establecido en este texto, para determinar el procedimiento de análisis de datos más adecuado que se debe utilizar para contrastar una hipótesis de un diseño de investigación, los pasos a seguir serían:

Condiciones y supuestos: Los procedimientos para el contraste de hipótesis que veremos a lo largo del programa de este curso requieren el cumplimiento de unos supuestos a la hora de seleccionar el estadístico de contraste más adecuado al diseño de la investigación, y se refieren al número de muestras utilizadas y su tamaño, el nivel de medida de la o las variables incluidas en la hipótesis, la forma de su distribución en la población, la varianza poblacional conocida o desconocida, etc.

Formulación de hipótesis: Las hipótesis de investigación se traducen en hipótesis estadísticas. Por lo general, la hipótesis del investigador trata de encontrar resultados significativos, es decir, diferencias significativas entre la teoría y los datos, y por esta razón se corresponde con la hipótesis alternativa. Por el contrario, la hipótesis nula afirma que tales diferencias no existen y es la hipótesis que se supone provisionalmente verdadera y que se contrasta con la evidencia que proporcionan los datos de la investigación. Si las hipótesis se refieren a parámetros poblacionales podemos plantear una hipótesis direccional o bidireccional (en donde θ representa un parámetro poblacional genérico):

Contraste bilateral	Unilateral derecho	Unilateral izquierdo
$H_0 : \theta = \theta_0$	$H_0 : \theta \leq \theta_0$	$H_0 : \theta \geq \theta_0$
$H_1 : \theta \neq \theta_0$	$H_1 : \theta > \theta_0$	$H_1 : \theta < \theta_0$

Regla de decisión: Seleccionamos el estadístico de contraste que representa la discrepancia entre el estadístico obtenido a partir de los datos observados en la muestra y el valor planteado en la hipótesis como parámetro poblacional. Este estadístico de contraste tiene una determinada distribución de probabilidad (su distribución muestral) que nos permite fijar los valores críticos que determinan la zona de rechazo de la hipótesis nula. Se ha explicado que estos valores críticos representan la máxima diferencia que puede observarse entre los datos observados en la muestra y los datos teóricos planteados en la hipótesis nula, bajo el supuesto de que ésta es cierta. Esta diferencia o discrepancia entre los datos teóricos y los datos empíricos se puede cuantificar igualmente, en términos de probabilidad: el nivel crítico p.

Calculamos el estadístico de contraste y el nivel crítico p asociado a este valor, que indica la probabilidad de que, siendo cierta la hipótesis nula, obtengamos unos datos iguales o más extremos a los observados en la muestra.

Concluimos respecto al rechazo o no de la hipótesis nula, bien comparando el estadístico de contraste con el valor crítico o comparando el nivel crítico p con el nivel de significación. Si el nivel crítico p es menor que el nivel de significación establecido *a priori*, rechazamos la hipótesis nula. En esta situación también observaremos que el estadístico de contraste supera la máxima diferencia que cabe esperar por simple azar. En caso contrario diremos que no hay evidencias suficiente para rechazar la hipótesis nula por lo que la conservamos o mantenemos con un determinado nivel de confianza.

Interpretamos esta conclusión con referencia a los objetivos e hipótesis de la investigación.

2.9.- EJERCICIOS DE AUTOEVALUACÓN

1. La distribución muestral de la media es una distribución t de Student, cuando: a) se desconoce la varianza poblacional; b) se conoce la varianza poblacional pero se utilizan muestras pequeñas; c) la variable de estudio no se distribuye normalmente en la población y se utilizan muestras grandes.
2. La distribución muestral de la media es una distribución normal, cuando: a) se conoce la varianza poblacional; b) se desconoce la varianza poblacional pero se utilizan muestras pequeñas; c) la variable de estudio no se distribuye normalmente en la población y se utilizan muestras pequeñas.
3. El nivel crítico p, representa: a) la probabilidad de rechazar una hipótesis nula que es verdadera; b) la probabilidad de error al tomar una decisión sobre la hipótesis nula; c) la probabilidad de obtener unos resultados como los obtenidos en nuestra investigación, suponiendo cierta la hipótesis nula.
4. ¿Cuál de las siguientes alternativas es INCORRECTA: a) el valor crítico puede ser negativo; b) el estadístico de contraste puede ser negativo; c) el nivel de significación puede ser negativo.

Para dejar constancia real de las preferencias de los padres sobre la lengua vehicular en la que prefieren que se eduque a sus hijos, una determinada asociación de padres realiza una encuesta sobre una muestra de 800 familias residentes en una determinada autonomía bilingüe, encontrando que 280 familias son partidarios de que todas de las asignaturas se enseñen en castellano y 168 manifiestan su deseo de que la mayoría de las asignaturas se impartan en castellano. Se fija un nivel de significación "alfa" del 0,05 (5%) y la asociación de padres quiere dejar evidencia de que más de la mitad de los padres quiere escolarizar a sus hijos en colegios en los que la presencia del castellano en la enseñanza sea mayoritaria:

5. La hipótesis nula es: a) $H_0 : \pi \leq 0,5$; b) $H_0 : \pi \geq 0,5$; c) $H_0 : \pi = 0,5$.
6. El valor del estadístico de contraste, es: a) 2,28; b) 1,96; c) 3,39
7. La máxima diferencia atribuible al azar entre los datos observados en la muestra y los datos teóricos planteados en la hipótesis nula es: a) 1,96; b) 1,64; c) $\pm 1,96$
8. Suponiendo cierta la hipótesis nula, la probabilidad de encontrar unos resultados como los observados en la muestra es: a) 0,9997; b) 0,003 ;c) 0,0006
9. La conclusión de este estudio, es: a) Rechazar la hipótesis nula porque p<α; b) No se puede rechazar la hipótesis nula porque p>α; c) No rechazar la hipótesis nula porque el estadístico de contraste no supera la máxima diferencia que cabe esperar por simple azar.
10. De una población en la que la variable de estudio tiene una distribución normal, $N(\mu;\sigma)$, se extrae una muestra aleatoria de 26 observaciones obteniendo una varianza de 225. Si fijamos el nivel de significación en 0,10, ¿cuánto valdrá la potencia del contraste de $H_1 : \mu = 23$ frene a $H_0 : \mu = 20$, para un contraste unilateral derecho: a) 0,6163; b) 0,3887; c) 0,2652.
11. De una población en la que la variable de estudio tiene una distribución normal, $N(\mu;\sigma)$, se extrae una muestra aleatoria de 26 observaciones obteniendo una varianza de 225. Si fijamos el nivel de significación en 0,10, ¿cuánto valdrá la potencia del contraste de $H_1 : \mu = 23$ frene a $H_0 : \mu = 20$, para un contraste bilateral: a) 0,2652; b) 0,7348; c) 0,3887.

SOLUCIONES:

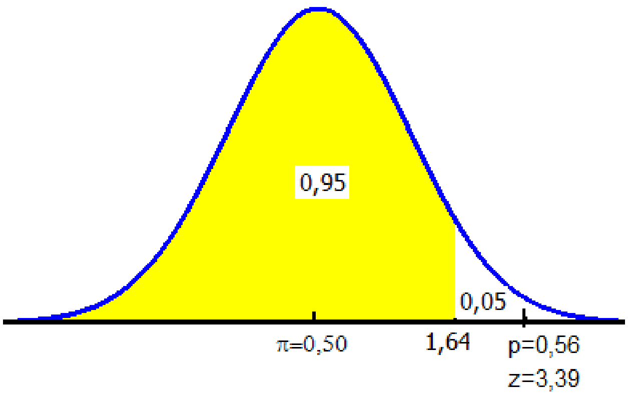
1. Si se desconoce la varianza poblacional, la distribución muestral de la media es la distribución t de Student. La respuesta correcta es la a)
2. Cuando se conoce la varianza poblacional, la distribución muestral de la media es normal. La respuesta correcta es la a)
3. El nivel crítico p indica la probabilidad de obtener unos determinados resultados supuesta verdadera la hipótesis nula. Si esta probabilidad es muy pequeña se rechaza la hipótesis nula. La respuesta correcta es la c)

4. Tanto el nivel crítico p como el nivel de significación son probabilidades que nunca pueden ser negativos. Sus valores, expresados en tanto por uno, están comprendidos entre 0 y 1. La respuesta correcta es la c)
5. La hipótesis del investigador es la hipótesis alternativa que pretende demostrar que “más de la mitad de los padres desean escolarizar a sus hijos en colegios en los que la presencia del castellano es mayoritaria. Por tanto la hipótesis nula, negación de la anterior corresponde la la alternativa a)-
6. La respuesta correcta es la c)

$$P = \frac{168 + 280}{800} = 0{,}56$$

$$Z = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi \cdot (1 - \pi)}{n}}} = \frac{0{,}56 - 0{,}5}{0{,}01768} = 3{,}39$$

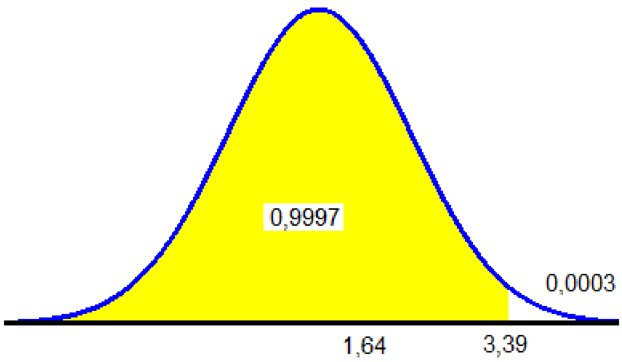
7.- La respuesta correcta es la b). La distribución muestral de la proporción es una distribución binomial que tiende a la normal. El valor de z que deja por debajo una probabilidad de 0,95 es z=1,64 que corresponde al valor crítico de este ejemplo.



8.- La respuesta correcta es la b). Para z=3,39 encontramos que en la distribución normal:

$P(z \leq 3{,}39) = 0{,}9997$

Por tanto: $P(Z > 3{,}39) = 1 - P(Z \leq 3{,}39) = 1 - 0.9997 = 0{,}0003$



9. La solución correcta es la a). Ya que suponiendo cierta la hipótesis nula, la probabilidad de encontrar en una muestra de 800 personas a 448 a favor de esta opción es de un 3 por 10.000. Esta probabilidad es tan pequeña que nos lleva a rechazar la hipótesis nula.

De otra forma, la discrepancia entre la proporción obtenida en la muestra y el valor teórico planteado en la hipótesis nula (3,39) es mayor que la máxima discrepancia que se puede admitir por simple azar (1,64) lo que nos lleva rechazar la hipótesis nula.

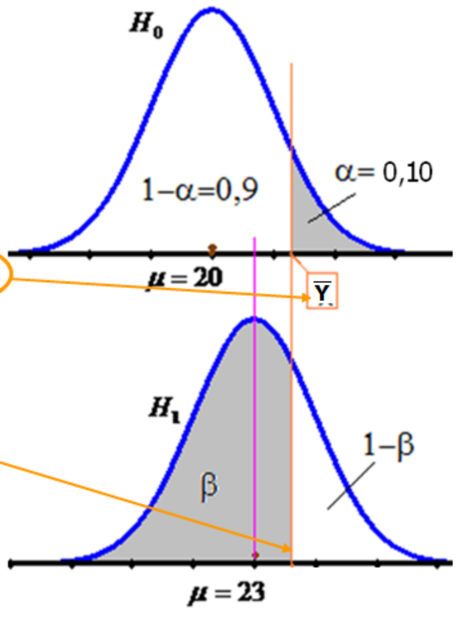
10.- Para calcular la potencia del contraste: $H_0\!: \mu = 20$ frente a $H_1\!: \mu = 23$ buscamos en la distribución muestral de la media el valor de Z que deja por debajo una probabilidad de 0,90, (nivel de confianza en un contraste unilateral) y es Z= 1,28. A esta puntuación le corresponde, en la distribución de la Ho, una media muestral $\overline{Y}$ de 23,84. En la distribución de H_1, con media de 23, a la puntuación $\overline{Y} = 23{,}84$ le corresponde una puntuación típica de 0,28. Buscamos en la tabla de la distribución normal las probabilidades correspondientes a esta puntuación típica que vale 0,6103. De forma gráfica, el razonamiento es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 0{,}1 \Rightarrow Z = 1{,}28 \\ \sigma_{\overline{Y}} = \dfrac{S}{\sqrt{n-1}} = \dfrac{15}{5} = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} Z = \dfrac{\overline{Y} - \mu}{\sigma_{\overline{Y}}} \Rightarrow \\ 1{,}28 = \dfrac{\overline{Y} - 20}{3} \Rightarrow \overline{Y} = 23{,}84 \end{array}$$

$$Z = \frac{\overline{Y} - \mu}{\sigma_{\overline{Y}}} = \frac{23{,}84 - 23}{3} = 0{,}28$$

$$\beta = P(Z \leq 0{,}28) = 0{,}6103$$

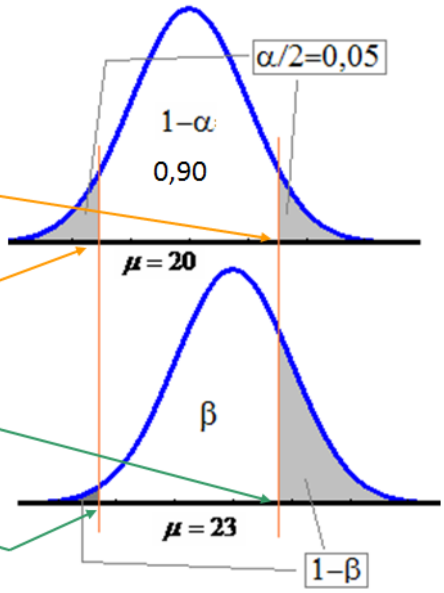
$$1 - \beta = P(Z \geq 0{,}28) = 1 - 0{,}6103 = 0{,}3897$$



11.- En una muestra de n=26 sujetos los datos que obtenemos son: Varianza: 225 y con un alfa=0,10 queremos calcular la pontencia de un contraste bilateral, siendo las hipótesis nula y alternativa, las siguientes:

$$H_0 : \mu = 20$$
$$H_1 : \mu = 23$$

$$\left.\begin{array}{c} \alpha = 0{,}1 \Rightarrow \\ Z = \pm 1{,}64 \\ \sigma_{\bar{Y}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} Z = \dfrac{\bar{Y} - \mu}{\sigma_{\bar{Y}}} \Rightarrow \\ 1{,}64 = \dfrac{\bar{Y}_s - 20}{3} \Rightarrow \bar{Y}_s = 24{,}92 \\ -1{,}64 = \dfrac{\bar{Y}_i - 20}{3} \Rightarrow \bar{Y}_i = 15{,}08 \end{array}$$



$$Z = \frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma_{\bar{Y}}} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{24{,}92 - 23}{3} = 0{,}64 \\ \dfrac{15{,}08 - 23}{3} = -2{,}64 \end{array} \right.$$

$$\beta = P(-2{,}64 \le Z \le 0{,}64) = 0{,}7348$$

$$1 - \beta = 1 - 0{,}7348 = 0{,}2652$$